

1. LA GEOMETRIA ANALITICA

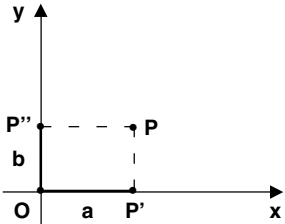
1.1 IL PIANO CARTESIANO

1.1.1 Coordinate cartesiane

Due rette orientate nel piano perpendicolari tra loro, aventi come punto d'intersezione il punto O, costituiscono un **sistema di riferimento cartesiano ortogonale**. La retta orientata orizzontale è detta **asse x** o anche **asse delle ascisse**, quella verticale **asse y** o **asse delle ordinate**. Sia P un qualsiasi punto del piano.

Conduciamo da P la parallela all'asse x e la parallela all'asse y.
Le due parallele incontrano i due assi rispettivamente nei punti P' e P":
Al punto P si associano due valori:

OP' = a detta ascissa di P
OP" = b detta ordinata di P

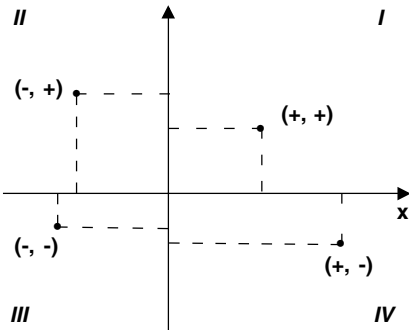


L'ascissa e l'ordinata di P costituiscono le coordinate cartesiane di questo punto nel piano e si indicano col simbolo:

P(a,b) "P di coordinate a, b"

Osservazioni.

- Se l'unità di misura degli assi x e y è la stessa il sistema è detto **Monometrico, Dimetrico** altrimenti. Ci riferiremo, nel seguito, a sistemi di riferimento del primo tipo.
- I due assi dividono il piano in quattro quadranti. I punti del piano hanno coordinate positive o negative a seconda del quadrante in cui si trovano (I quadrante: ascissa e ordinata positiva; II quadrante: ascissa negativa, ordinata positiva; III quadrante: ascissa e ordinata negative; IV quadrante: ascissa positiva ordinata negativa).



1.1.2 Distanza tra due punti

Dati due punti P₁ e P₂ del piano, di coordinate rispettivamente (x₁,y₁) e (x₂,y₂), determiniamo la distanza tra questi due punti.

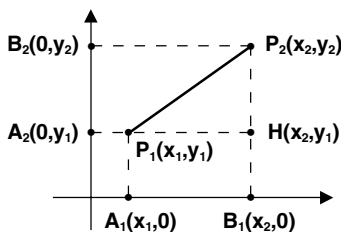
$$\overline{P_1H} = \overline{A_1B_1} = |x_2 - x_1|$$
$$\overline{P_2H} = \overline{A_2B_2} = |y_2 - y_1|$$

$\overline{P_1P_2}$ per il teorema di Pitagora è pari a:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{P_1H^2 + P_2H^2}$$

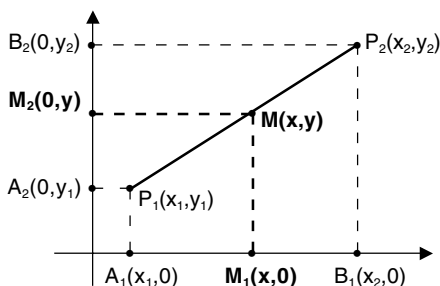
sostituendo, otteniamo:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad [1.1.1]$$



1.1.3 Coordinate del punto medio di un segmento

Dati due punti del piano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, consideriamo il punto medio M del segmento P_1P_2 . Indichiamo con (x, y) le coordinate, da determinare, di questo punto. Per far ciò proiettiamo questi punti su i due assi, come in figura:



Per il Teorema di Talete⁽¹⁾ M_1 è punto medio di A_1B_1 e M_2 è punto medio di A_2B_2 .

$$\overline{A_1M_1} = \overline{M_1B_1} \Rightarrow x - x_1 = x_2 - x \Rightarrow x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\overline{A_2M_2} = \overline{M_2B_2} \Rightarrow y - y_1 = y_2 - y \Rightarrow y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

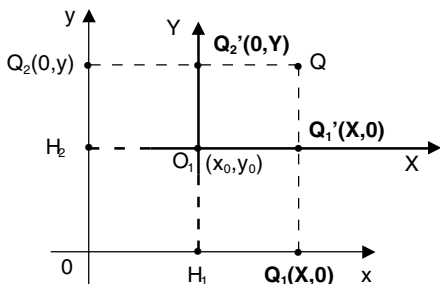
Le coordinate di M sono, quindi:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad [1.1.2]$$

1.1.4 Traslazione nel piano

Siano dati due sistemi di riferimento ortogonali cartesiani paralleli ed equiversi xOy e XO,Y . O_1 nel sistema di riferimento xOy ha coordinate (x_0, y_0) .

Consideriamo un punto generico del piano Q . Tale punto avrà coordinate diverse a seconda se si considera il primo o il secondo sistema di riferimento. Siano (x, y) le coordinate nel primo e (X, Y) nel secondo. Vediamo quale relazione intercorre tra le due coppie di coordinate, aiutandoci con la seguente figura:



$$x = \overline{OQ_1} = \overline{OH_1} + \overline{H_1Q_1} = x_0 + X$$

$$y = \overline{OQ_2} = \overline{OH_2} + \overline{H_2Q_2} = y_0 + Y$$

Le formule

$$\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases} \quad [1.1.3] \quad \begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases} \quad [1.1.4]$$

⁽¹⁾ Teorema di Talete: "Se un fascio di rette parallele viene tagliato da due trasversali i segmenti determinati sull'una sono proporzionali ai corrispondenti segmenti determinati sull'altra". Nel nostro caso: le parallele sono A_1P_1 , M_1M e B_1P_2 , e le rette trasversali sono l'asse x e la retta P_1P_2 , per il teorema appena citato si ha:

$$\frac{A_1M_1}{A_1B_1} = \frac{P_1M}{P_1P_2} \quad \text{e} \quad \frac{M_1B_1}{A_1B_1} = \frac{MP_2}{P_1P_2}$$

Ma M è punto medio di P_1P_2 , quindi $MP_1 = MP_2 = P_1P_2/2$. Sostituendo, otteniamo:

$A_1M_1 = A_1B_1/2$ e $M_1B_1 = A_1B_1/2$. Quindi M_1 è punto medio di A_1B_1 .

Lo stesso discorso si fa per le parallele A_2P_1 , M_2M e B_2P_2 , tagliate dall'asse y e da P_1P_2 .

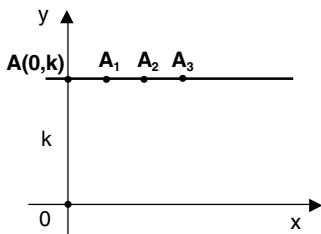
sono dette **formule di traslazione** e permettono di passare dal sistema xOy al sistema XO_1Y ([1.1.4]) e dal sistema XO_1Y al sistema xOy ([1.1.3]). Ovviamente le coordinate di O_1 in xOy devono essere note.

1.2 LA RETTA

1.2.1 L'equazione della retta

• Retta parallela all'asse x

Consideriamo una retta nel piano parallela all'asse x . Tale retta incontra necessariamente l'asse delle ordinate in un determinato punto, per esempio $A(0,k)$. Osserviamo che qualsiasi punto della retta considerata ($A_1, A_2, A_3, \dots$) ha la caratteristica di avere ordinata pari a k .



Inoltre qualsiasi punto di ordinata pari a k appartiene a tale retta.

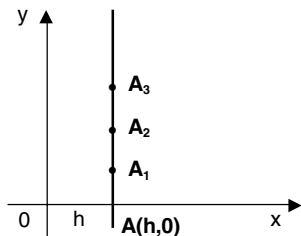
Una retta parallela all'asse x è il luogo geometrico dei punti aventi ordinata costante, per esempio k . Algebricamente tale condizione si traduce dicendo che la retta ha equazione:

$$y = k$$

In particolare se $k=0$ avremo $y=0$, che rappresenta l'equazione dell'asse delle ascisse.

• Retta parallela all'asse y

Il discorso fatto prima vale anche per una retta parallela all'asse delle ordinate. I punti di questa retta sono caratterizzati dall'avere ascissa costante, per esempio h .



Inoltre qualsiasi punto di ascissa pari ad h appartiene a questa retta.

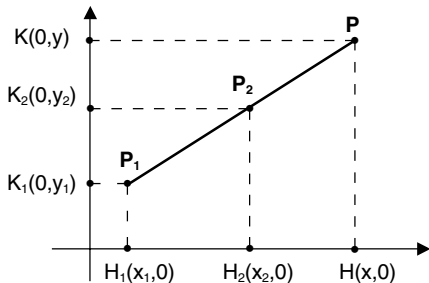
Algebricamente tale retta ha equazione:

$$x = h$$

In particolare se $h=0$ si ha l'equazione $x=0$, che rappresenta l'equazione dell'asse y .

• Retta generica

Consideriamo una generica retta e due punti appartenenti ad essa, di coordinate note $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$. Consideriamo inoltre un terzo punto P di coordinate (x, y) .



Per il Teorema di Talete si ha:

$$\frac{H_1H}{H_1H_2} = \frac{P_1P}{P_1P_2} \quad \text{e} \quad \frac{K_1K}{K_1K_2} = \frac{P_1P}{P_1P_2}$$

$\Downarrow$

$$\frac{H_1H}{H_1H_2} = \frac{K_1K}{K_1K_2}$$

$\Downarrow$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad [*]$$

Ricordiamo che x e y sono le coordinate del generico punto della retta, mentre x_1, y_1, x_2, y_2 sono valori noti. Sviluppando la [*] otteniamo:

$$(y_2 - y_1)x + (x_2 - x_1)y - x_1y_2 + x_2y_1 = 0$$

ponendo: $y_2 - y_1 = a$, $x_2 - x_1 = b$ e $-x_1y_2 + x_2y_1 = c$

otteniamo la seguente equazione:

$$ax + by + c = 0$$

che rappresenta l'equazione della retta generica nel piano. I parametri a, b sono i coefficienti dell'equazione e c è il termine noto.

In questo modo abbiamo fatto vedere che la generica retta del piano ha un'equazione di tipo lineare, tralasciamo la dimostrazione che mostra che ogni equazione lineare del tipo $ax + by + c = 0$ (con a, b e c numeri reali) rappresenta una retta.

L'equazione appena trovata rappresenta l'equazione di una retta in **forma implicita**.

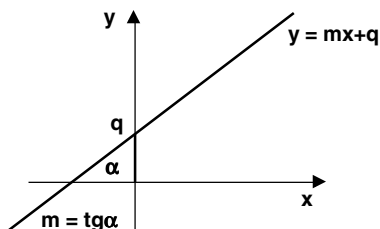
Sia, ora, r una retta di equazione $ax + by + c = 0$, non parallela all'asse y (quindi $b \neq 0$), dividiamo per b e isoliamo la y

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Ponendo: $m = -a/b$ e $q = -c/b$, l'equazione diventa:

$$y = mx + q$$

che rappresenta l'equazione della retta in **forma esplicita**.



Il coefficiente m è detto *coefficiente angolare* e geometricamente rappresenta la pendenza della retta, o meglio esso è il valore della tangente dell'angolo α che la retta forma con l'asse x .

Mentre q è il *termine noto* dell'equazione e rappresenta l'ordinata dell'intersezione della retta con l'asse y .

1.2.2 Intersezione tra due rette, incidenza e parallelismo

Consideriamo due rette r_1 ed r_2 di equazioni:

$$r_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad r_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Le coordinate degli eventuali punti comuni alle due rette devono soddisfare entrambe le equazioni, devono essere, quindi, soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Sono possibili tre casi.

1. Il sistema ammette un'unica soluzione, un'unica coppia (x, y) , (sistema determinato). Quindi le due rette hanno un punto in comune.
2. Il sistema non ammette soluzione (sistema impossibile). Le due rette non hanno alcun punto in comune, sono, quindi, parallele.
3. Il sistema ammette infinite soluzioni (sistema indeterminato). Le due rette hanno infiniti punti in comune, ossia coincidono.

Analizziamo algebricamente i tre casi.

1. Il sistema è determinato quando il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$$

Le due rette sono quindi **INCIDENTI** se i coefficienti soddisfano la condizione:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0, \text{ ossia: } \frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$$

2. Il sistema è impossibile quando :

- il determinante della matrice dei coefficienti è nullo

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

ciò significa che le due righe della matrice dei coefficienti sono proporzionali, cioè esiste un $k \neq 0$ tale che $a_1 = k a_2$ e $b_1 = k b_2$; $c_1 \neq k c_2$.

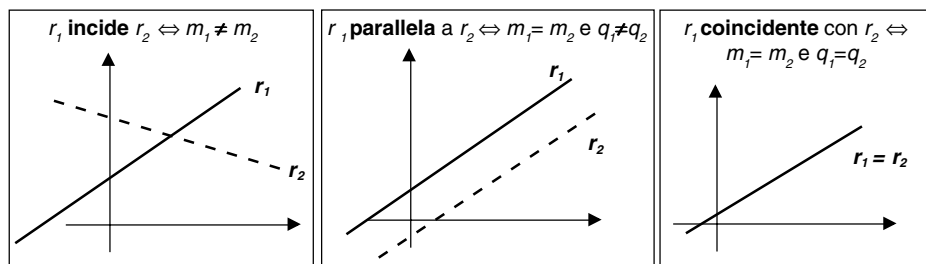
Le due rette sono, quindi, **PARALLELE** se esiste un $k \neq 0$ tale che:

$$a_1 = k a_2, b_1 = k b_2 \text{ e } c_1 \neq k c_2 \text{ oppure: } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

3. Se, invece, si ha: $a_1 = k a_2, b_1 = k b_2 \text{ e } c_1 = k c_2$

le due rette sono proporzionali, rappresentano un'unica retta (rette **COINCIDENTI**)

Per rette in forma esplicita ($r_1: y = m_1 x + q_1$, $r_2: y = m_2 x + q_2$) queste condizioni si traducono come segue:



1.2.3 Perpendicolarità

Consideriamo due rette r ed r' di equazione (in forma esplicita):

$$r: y = mx + q \quad r': y = m'x + q'$$

diremo che le due rette sono **PERPENDICOLARI** se e solo se $mm' = -1$, oppure:

$$m = -\frac{1}{m'}$$

La condizione di perpendicolarità per due rette le cui equazioni sono poste in forma implicita ($ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$) si traduce:

$$\frac{a}{b} = -\frac{b'}{a'}$$

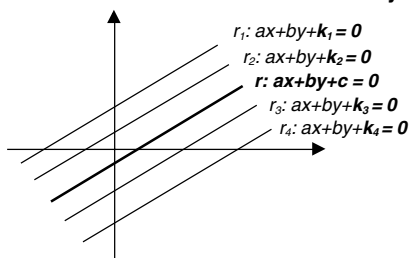
1.2.4 Fasci di rette

• Fascio improprio

Un **fascio improprio** di rette è l'insieme di tutte le rette del piano parallele ad una retta data, detta base del fascio.

Sia $r: ax+by+c=0$ l'equazione di una retta nel piano, ogni altra retta parallela a questa ha equazione:

$$ax+by+k=0 \text{ con } k \in \mathbb{R}$$



Nel caso in cui la retta è in forma esplicita ($y = mx+q$), l'equazione del fascio avente questa come base è:

$$y = mx+k, \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

• Fascio proprio

Un **fascio proprio** di rette di centro C è l'insieme di tutte le rette del piano passanti per C .

Due rette non parallele generano un fascio proprio il cui centro è rappresentato dal loro punto d'intersezione.

Siano r ed s le due "generatrici":

$$r: ax+by+c=0 \text{ e } s: a'x+b'y+c'=0$$

L'equazione :

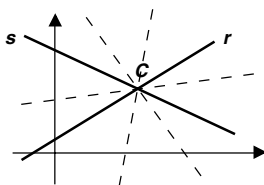
$$\alpha(ax+by+c)+\beta(a'x+b'y+c')=0, \text{ con } \alpha \text{ e } \beta \neq 0$$

si dice combinazione lineare delle due rette a coefficienti α e β . Dividendo per β , essendo questo diverso da zero, otteniamo:

$$k(ax+by+c)+a'x+b'y+c'=0$$

$$\text{avendo posto } k = \frac{\alpha}{\beta}$$

Quest'equazione, al variare di k , rappresenta tutte le rette del fascio



1.2.5 Retta passante per un punto

Per determinare l'equazione del fascio di rette passanti per un punto assegnato $P_0(x_0, y_0)$, basta considerare, come generatrici del fascio, le rette parallele all'asse x e all'asse y passanti per P_0 .

$$\text{parallela all'asse } x \text{ passante per } P_0: y=y_0 \Rightarrow y-y_0=0$$

$$\text{parallela all'asse } y \text{ passante per } P_0: x=x_0 \Rightarrow x-x_0=0$$

L'equazione del fascio è combinazione lineare di queste due, ovvero:

$$\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)=0$$

dividendo per β , si ha:

$$\boxed{y-y_0=m(x-x_0)} \quad [1.2.1]$$

$$\text{avendo posto } m = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

N.B. Al variare di m si ottengono tutte le rette del fascio, esclusa la retta verticale $x-x_0=0$

1.2.6 Equazione della retta passante per due punti

Siano $A_1(x_1, y_1)$ e $A_2(x_2, y_2)$ due punti del piano, determiniamo l'equazione della retta passante per

essi.

L'equazione del fascio di rette passanti per A_1 è: $y - y_1 = m(x - x_1)$ [1].

Imponiamo il passaggio per A_2 e otteniamo: $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$, da cui ricaviamo il valore del coefficiente angolare m della retta cercata:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} [1.2.2]$$

Tale valore, sostituito nella [1] la trasforma in: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, ossia:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} [1.2.3]$$

1.2.7 Distanza di un punto da una retta

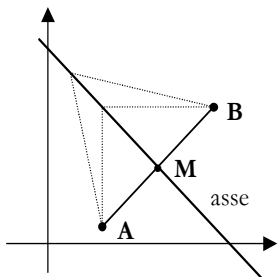
Data la retta r di equazione: $ax + by + c = 0$, la distanza di un punto $P_0(x_0, y_0)$ da questa, è data dall'espressione:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} [1.2.4]$$

1.2.8 Alcuni luoghi geometrici

• Asse di un segmento

Determiniamo l'asse di un segmento AB del piano. Ricordiamo che l'asse di un segmento AB è il luogo geometrico dei punti equidistanti da A e da B , cioè è la retta passante per il punto medio di AB e avente come coefficiente angolare l'antireciproco del coefficiente angolare della retta AB .



Se il punto A ha coordinate (x_A, y_A) e $B (y_B, y_B)$ allora l'equazione dell'asse è la seguente:

$$y - y_M = m(x - x_M) [1.2.5]$$

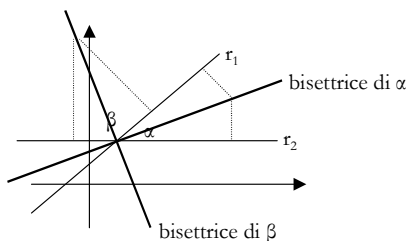
con

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad m = -\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$$

• Bisettrice di un angolo

Siano r_1 e r_2 due rette incidenti, di equazioni: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, determiniamo l'equazione delle due bisettrici degli angoli α e β formati da queste due rette.

La bisettrice è il luogo geometrico dei punti equidistanti dalle due rette.



Sfruttando questa condizione e con semplici passaggi si arriva alla seguente equazione:

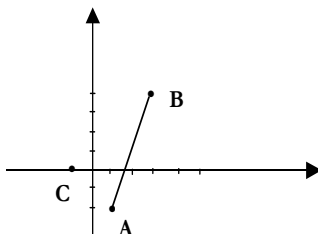
$$a_1x + b_1y + c_1 = \pm k(a_2x + b_2y + c_2) [1.2.6] \quad \text{con} \quad k = \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2}}$$

ESERCITAZIONE

Dati i punti $A(1, -2)$ e $B(3, 4)$ determinare:

1. L'equazione dell'asse del segmento AB .
2. L'equazione della retta r parallela ad AB passante per il punto $C(-1, 0)$.
3. La distanza tra la retta r e AB .
4. I punti dell'asse x tali che le rette congiungenti tali punti con A e con B siano tra loro perpendicolari.
5. Detti C e D tali punti, trovare l'asse del segmento.

È buona norma per risolvere correttamente un esercizio disegnare il grafico, ovvero riportare, anche in maniera approssimata, tutte le informazioni dell'esercizio in un sistema di assi cartesiani, e confrontare via via i risultati ottenuti col disegno.



Svolgiamo l'esercizio punto per punto.

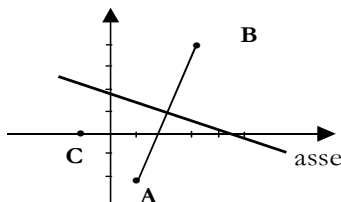
1. Per determinare l'equazione dell'asse del segmento AB bisogna prima trovare le coordinate del punto medio e poi il coefficiente angolare della retta AB : Per la [1.1.2] le coordinate del punto medio M sono: $x_M=2$ e $y_M=1$.

Il coefficiente della retta AB (m_{AB}) per la [1.2.2] è pari a 3.

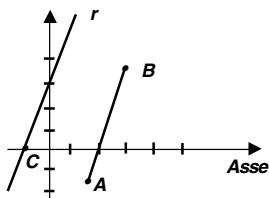
Applicando la [1.2.5], ovvero:

$$y - y_M = -\frac{1}{m_{AB}}(x - x_M) \quad \text{otteniamo:} \quad y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

da cui facendo i conti ricaviamo l'equazione dell'asse cercata: $x + 3y - 5 = 0$.



2. L'equazione di una retta parallela ad AB deve avere il suo stesso coefficiente angolare ($m=m_{AB}=3$), per trovare quella passante per C basta applicare la [1.2.1]: $y - y_C = m(x - x_C)$, $y - 0 = 3(x + 1)$ e otteniamo l'equazione: $3x - y + 3 = 0$



3. Per determinare la distanza della retta r da AB basta considerare un punto qualsiasi di r (per esempio C) e determinare, attraverso la [1.2.4], la distanza di questo da AB . Per far ciò però abbiamo bisogno dell'equazione della retta AB , che determiniamo attraverso la [1.2.3]:

$$\frac{y+2}{4+2} = \frac{x-1}{3-1} \text{ facendo i conti otteniamo la seguente equazione: } 3x-y-5=0.$$

Da questa equazione e dalle coordinate di C calcoliamo la distanza:

$$d = \frac{|-3-5|}{\sqrt{9+1}} = \frac{4}{5}\sqrt{10}$$

4. Dobbiamo determinare quei punti P_i appartenenti all'asse x tali che le rette PA e PB siano perpendicolari ($m_{PA} m_{PB} = -1$). Indichiamo con $(x,0)$ le coordinate del generico P_i . Determiniamo, quindi, i coefficienti di PA e PB :

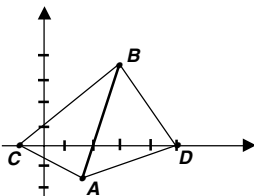
$$m_{PA} = -2/(1-x) \text{ e } m_{PB} = 4/(3-x).$$

Imponiamo la condizione di perpendicolarità:

$$\frac{-2}{1-x} \cdot \frac{4}{3-x} = -1$$

Facendo i conti, otteniamo la seguente equazione di II grado: $x^2 - 4x - 5 = 0$, le cui soluzioni sono $x = -1$ e $x = 5$. I punti cercati sono quindi $P_1(-1,0)$ e $P_2(5,0)$. Osserviamo che P_1 è proprio C e P_2 per comodità, lo chiamiamo D .

5. Riportiamo quanto appena trovato nel sistema cartesiano:



Osserviamo che il quadrilatero $ADBC$ è formato da due triangoli rettangoli ACB e ADB (rettangoli rispettivamente in C e in D), determiniamone l'area. Per far ciò occorrono le seguenti distanze:

$$AC = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad DA = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5},$$

$$CB = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}, \quad DB = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

A questo punto possiamo calcolare le due aree:

$$\text{area}(ACB) = 8$$

$$\text{area}(ADB) = 10$$

L'area totale è quindi 18.